

*...più che 'l doppiar de li scacchi
s'inmilla.*

(Par. XXVIII, 91-93)

La Matematica nella Divina Commedia



UNI-3 IVREA 2018

**Francesco LA
ROSA**

Contrariamente a quanto si possa pensare, nella Divina Commedia moltissimi sono i riferimenti e gli argomenti attinenti ai seguenti rami della scienza moderna:

la LOGICA
l'ARITMETICA e la TEORIA DEI
NUMERI
l'ALGEBRA e il CALCOLO
DELLE PROBABILITÀ
la GEOMETRIA
la GEOLOGIA
la MECCANICA
la RELATIVITÀ
la FISICA DEL CAOS
l'OTTICA e l'ACUSTICA

la TERMODINAMICA e
l'ELETTROMAGNETISMO
la PLANETOLOGIA
l'ASTRONAUTICA
l'ASTRONOMIA (intesa come
osservazione delle stelle)
la GEOGRAFIA ASTRONOMICA
l'ASTROFISICA e lo studio
dell'universo su grande scala
la RELATIVITÀ GENERALE e
la MECCANICA QUANTISTICA

Un esempio: **Ottica geometrica**

**... così mi parve da luce rifratta
Purgatorio, XV, 16-24**

*Come quando da l'acqua o da lo
specchio
salta lo raggio a l'opposita parte,
saltando su per lo modo parecchio*

*a quel che scende, e tanto si diparte
dal cader de la pietra in igual
tratta,
sì come mostra esperienza e arte;*

*così mi parve da luce rifratta
quivi dinanzi a me esser percosso;
per che a fuggir la mia vista fu ratta.*

Come quando dall'acqua o da uno specchio
un raggio rimbalza verso la parte opposta,
risalendo allo stesso modo

di com'era disceso, e si allontana **dalla
perpendicolare** per un tratto uguale,
così come dimostrano l'esperienza e la
scienza;

così mi sembrò di essere colpito da una luce
riflessa proprio davanti a me; per cui la mia
vista fu pronta a sfuggirne.

Dove siamo?

Siamo nel Purgatorio, al passaggio tra la seconda e la terza Cornice, in un canto che presenta alcune difficoltà, per il contenuto intessuto di riflessioni scientifiche e considerazioni filosofiche.

Il poeta procede, accompagnato da Virgilio, verso Occidente e la luce del Sole cadente gli batte sul volto; ma ad un tratto una nuova luce, decisamente più abbagliante, si aggiunge: è la luce che proviene dall'Angelo della mansuetudine che si fa incontro ai pellegrini per farli salire al girone superiore.

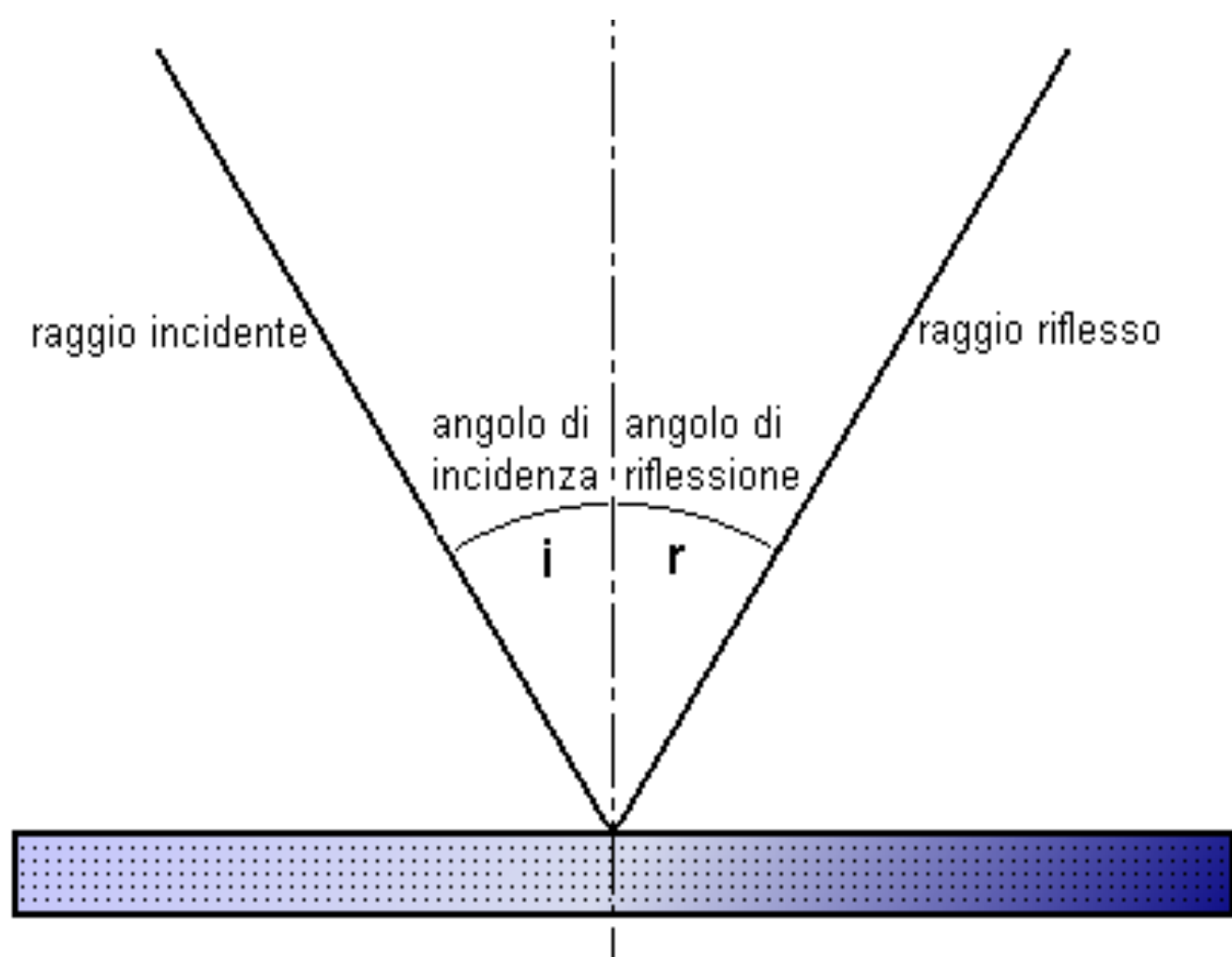
La luce è così intensa che non è sufficiente schermarsi gli occhi con le mani, occorre girare la vista da un'altra parte.

Il riferimento

Il riferimento presente in questi versi è del tutto evidente: **la legge della riflessione, secondo cui l'angolo tra il raggio incidente e la normale (il cader della pietra) è uguale a quello tra la normale e il raggio riflesso.**

Probabilmente Dante, anche se non ne parla direttamente, ha qui in mente la riflessione tramite uno specchio curvo, che riesce a concentrare la luce riflessa, aumentandone la luminosità tanto da rendere difficile il guardarla.

Del resto questo fenomeno era ben noto fin dall'antichità (si pensi ai famosi specchi ustori di Archimede).



Dante, quindi, fa della *Commedia* non solo un'opera letteraria, ma mostra anche il suo sapere riguardo aspetti matematici e scientifici, cosmologici e astrologici, fisici e logici.

Possiamo sviluppare, sotto l'aspetto matematico, diversi argomenti presenti nella *Commedia*, come per esempio *il gioco della zara e la quadratura del cerchio*.

In questa presentazione viene approfondito il *tema dell'infinito di Dante*, riguardante *la leggenda di Sissa Nassir, inventore del gioco degli scacchi, e il numero degli angeli nel Paradiso*.

In questo breve saggio, verranno trattati per ovvi ragioni di tempo, solo tre temi:

- **Aritmetica**
- **Probabilità**
- **Geometria**



Ricordiamo che Dante nacque a Firenze tra il 21 maggio e il 21 giugno del 1265 e morì a Ravenna il 14 settembre 1321.



La [tomba di Dante](#) a Ravenna, realizzata da Camillo Morigia



Il cenotafio di [Dante Alighieri](#) nella [Basilica di Santa Croce](#) a [Firenze](#): il poeta è sepolto a [Ravenna](#)

NOTA: Le travagliate vicende dei resti

I resti mortali di Dante furono oggetto di diatribe tra i ravennati e i fiorentini già dopo qualche decennio la sua morte, quando l'autore della *Commedia* fu "riscoperto" dai suoi concittadini grazie alla propaganda operata da Boccaccio. Se i fiorentini rivendicavano le spoglie in quanto concittadini dello scomparso (già nel 1429 il Comune richiese ai Da Polenta la restituzione dei resti), i ravennati volevano che rimanessero nel luogo dove il poeta morì, ritenendo che i fiorentini non si meritassero i resti di un uomo che avevano dispregiato in vita.

Per sottrarre i resti del poeta a un possibile trafugamento da parte di Firenze (rischio divenuto concreto sotto i papi [medicei Leone X](#) e [Clemente VII](#)), i frati [francescani](#) tolsero le ossa dal sepolcro nascondendole in un luogo segreto e rendendo poi, di fatto, il monumento del Morigia un [cenotafio](#).

Un **cenotafio** è un [monumento sepolcrale](#) che viene eretto per ricordare una persona o un gruppo di persone sepolte in altro luogo. Quando nel 1810 [Napoleone](#) ordinò la soppressione degli ordini religiosi, i frati, che si erano tramandati il luogo ove si trovavano i resti, decisero di nasconderle. Le spoglie rimasero in quel luogo fino al [1865](#), allorché un muratore, nel restaurare il convento in occasione del VI centenario della nascita del poeta, scoprì casualmente sotto una porta murata una piccola cassetta di legno contenente le ossa di Dante. La salma fu ricomposta, [esposta](#) per qualche mese in un'urna di cristallo e quindi ritumulata all'interno del tempietto del Morigia, in una cassa di noce protetta da un cofano di piombo. Nell'[epigrafe](#) di [Bernardo da Canaccio](#) del 1357, una frase: «... *qui sto racchiuso, [io] Dante, esule dalla patria terra, cui generò [Firenze](#), madre di poco amore.*»

1. Aritmetica

La Divina Commedia fu iniziata forse a Firenze verso l'anno 1300 e successivamente composta fra il 1307 e il 1320.

A quell'epoca, quale e quanta aritmetica conosceva Dante?

Sicuramente una delle principali fonti del sapere medioevale di Dante è rappresentato dal suo maestro **Brunetto Latini**, nato a Firenze intorno al 1220.

Dopo il 1290 - dunque all'età di 25 anni - Dante studia filosofia e in particolare **Severino Boezio (480-524)**, il quale Boezio non è solo filosofo e il traduttore delle opere di Euclide, bensì egli stesso valente matematico e autore di trattati di Aritmetica e Geometria.

Molti altri maestri vengono
omaggiati da Dante nel
Cielo del Sole, tra gli altri
Alberto Magno, Tommaso
d'Aquino, Severino Boezio,
Isidoro di Siviglia, Beda il
Venerabile, Riccardo di San
Vittore

«Questi che m'è a destra più vicino,
frate e maestro fummi, ed esso
Alberto
è di Colonia, e io Thomas d'Aquino
[...]

Per vedere ogne ben dentro vi gode
l'anima santa che 'l mondo fallace
fa manifesto a chi di lei ben ode
[...]

Vedi oltre fiammeggiar l'ardente
spiro
d'Isidoro, di Beda e di Riccardo,
che a considerar fu più che viro. »
(Par. X, 97-99.124-126.130-132)

Tutti costoro non si limitarono a ricopiare i testi dell'antichità, ma diedero il loro personale contributo a quelle che allora erano chiamate le "**Arti Liberali**", cioè quelle attività dove era necessario un lavoro prettamente intellettuale, a fronte delle "arti meccaniche" che richiedevano uno sforzo fisico. Il loro studio iniziò nella "**Schola Palatina**" (781) fondata da **Carlo Magno** e diretta dal monaco inglese **Alcuino di York** per formare i burocrati che avrebbero servito tra i ranghi dell'amministrazione carolingia.

Alcuino (735-804) studiò presso la scuola di York (Inghilterra del Nord), all'epoca la più rinomata d'Europa e di cui divenne direttore.



NOTA STORICA

Chi era Alcuino di York?

E che c'entra Carlo Magno con i giochi matematici e la nascita della *Matematica ricreativa*?

Carlo Magno, preoccupato del degrado culturale e della scarsa scolarità del popolo ma anche nel clero e nei nobili, decise di favorire e innalzare la formazione culturale del reame creando l'Accademia Palatina, che avrà un ruolo notevole nel rilanciare gli studi e favorire la rinascita intellettuale di tre secoli dopo.

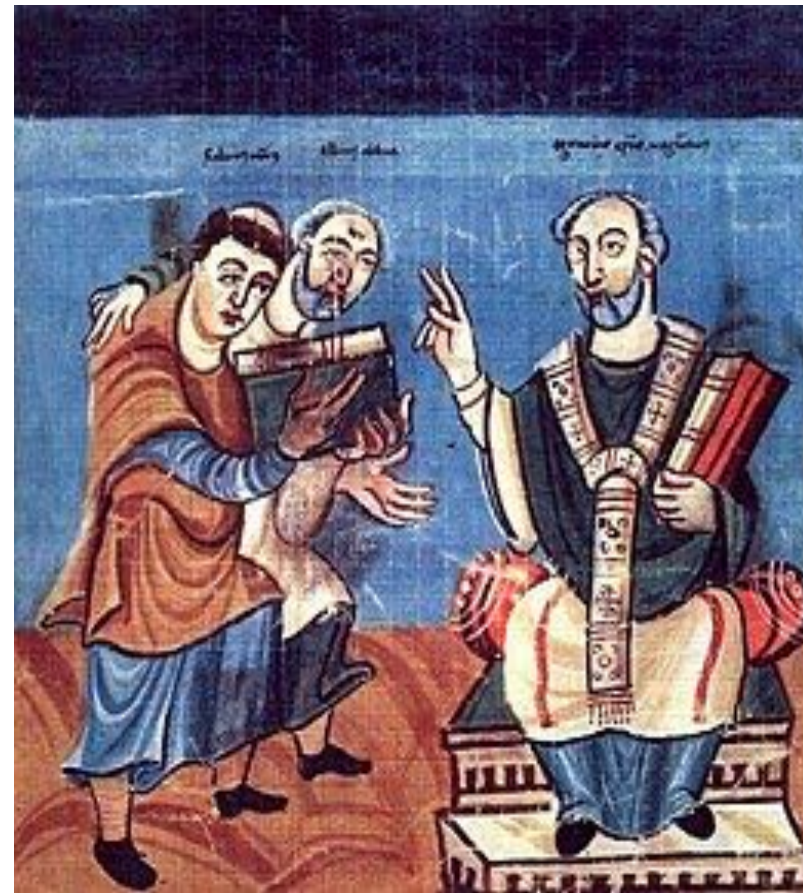
Per questo si rivolse a Alcuino, studioso formatosi alla scuola della Cattedrale di York.

Carlo Magno incontrò Alcuino a Parma nel 781, invitandolo a trasferirsi ad Aquisgrana per dirigere la scuola di palazzo.

Nel 796 Carlo Magno lo nominerà abate di un monastero di Tours, dove morirà nell'804.



**Carlo Magno e
Alcuino**



**Alcuino e
la Schola Palatina
(781)**



Carlo Magno: 742-814; re dei Franchi dal 768, re dei Longobardi dal 774 e incoronato nella Basilica di S. Pietro da papa Leone III la notte di Natale dell'800 primo imperatore del Sacro Romano Impero.



**Incoronazione
di
Carlo Magno**

Alcuino scrisse molti testi didattici legati al suo insegnamento.

Nelle antiche raccolte i giochi matematici sono in generale mescolati con i problemi pratici, legati cioè alle necessità della vita quotidiana.

Salvare capra e cavoli.

Da dove viene questa famosa espressione?

Da un gioco di logica matematica, apparentemente semplice, ma curioso.

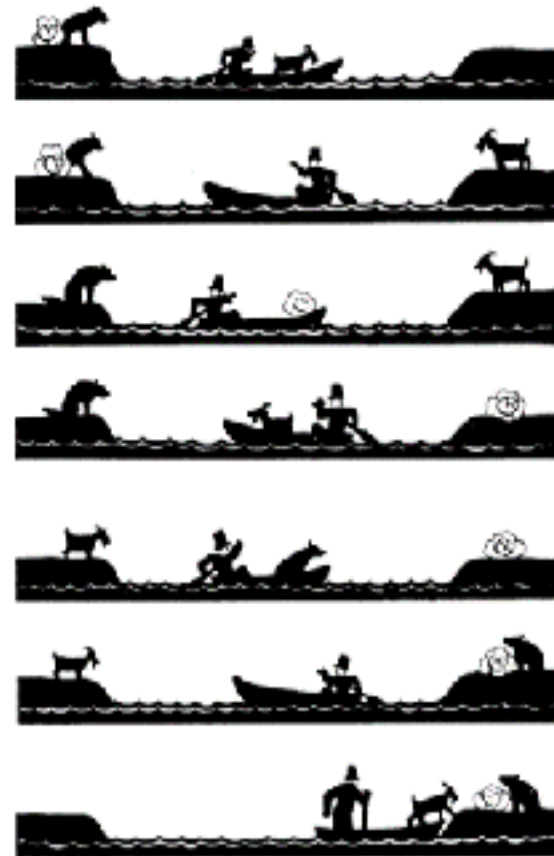
Ad **Alcuino** è attribuito il celeberrimo indovinello del contadino, della capra, del lupo e del cavolo, diventato così popolare in qualsiasi circostanza in cui sia difficile fare una scelta tra cose o situazioni incompatibili tra loro. Cioè, quando si cerca di soddisfare contemporaneamente due opposte esigenze.

Esempio: per uno studente, fare i compiti o vedere i suoi amici?

Soluzione migliore: fare i compiti con gli amici.

Un contadino deve traghettare una capra, un lupo ed un cavolo con una barchetta che può con lui trasportare solo uno di essi per volta.

Come deve procedere per salvare capra e cavoli?



Le arti liberali erano sette ed erano così divise:

- le **Arti del Trivio**: grammatica, retorica, dialettica;
- le **Arti del Quadrivio**: aritmetica, geometria, astronomia, musica

Alcuino scrisse molti testi didattici legati al suo insegnamento. Nelle antiche raccolte i **giochi matematici** sono in generale mescolati con i problemi pratici, legati cioè alle necessità della vita quotidiana. Tuttavia in epoche successive furono composte raccolte destinate a collezionare solo materiale di questo genere. Quasi completamente dedicata alla matematica ricreativa sono anche le *Propositiones ad acuendos juvenes* (*Problemi per rendere acuta la mente dei giovani*) scritte, in latino, all'inizio del nono secolo. Durante tutto il Medioevo numerose questioni di **matematica ricreativa** si trovano nei trattati italiani di **matematica mercantile**, i trattati d'abaco, come il *Liber Abaci* di Leonardo Fibonacci, detto il Pisano ([Pisa](#), [settembre 1175](#) circa - [Pisa](#), [1235](#) circa)

In questi testi i giochi matematici talora sono mescolati agli altri problemi, talaltro raccolti in opportuni capitoli.

Alcuni autori giustificano la presenza di questo tipo di questioni con l'intento di distrarre i lettori dalle noiose e ripetitive applicazioni pratiche.

Dante, ancora bambino, frequenta forse a Siena le lezioni del lisbonese **Pietro Ispano (1220-1277)**, massimo logico e teologo medievale, eletto poi Papa nel 1276 con il nome di **Giovanni XXI**.



**Giovanni XXI, l'unico
papa nel Paradiso
dantesco**

Nei Trattati di Abaco è diffuso l'uso del sistema arabo-indiano nella scrittura aritmetica, nonostante lo Statuto dell'Arte del Cambio di Firenze vietasse l'uso dei numeri Arabi.

La scrittura aritmetica con il sistema arabo permetteva calcoli più rapidi mediante:

- l'uso del sistema posizionale
- a base dieci
- uso esplicito dello zero

Tutte novità rispetto alla numerazione latina nella quale non c'è sistema posizionale, non c'è zero e non c'è base dieci, come sarà diffusa poi grazie all'opera di **Fibonacci**.

Sicuramente uno dei maggiori contributi alla nostra civiltà moderna che noi dobbiamo agli Arabi è rappresentato dall'**algebra**, che significa «**unione**», «**connessione**» o «**completamento**».

Il padre di questa disciplina è infatti unanimemente ritenuto il matematico persiano **Muhammad ibn Musa al-Kwarizmi** (780-850), anche se in realtà l'algebra era già stata ideata nel II millennio a.C. da egiziani e babilonesi, e poi portata avanti dal greco **Diofanto di Alessandria** (III-IV secolo d.C.) e dall'indiano **Brahmagupta** (598-668).

In ogni caso il termine "**algebra**" risale proprio ad **al-Kwarizmi**, derivando da quell' "**al-gabr**" nel titolo del suo trattato, che significa "**il completamento**" (cioè il procedimento che consiste nell'aggiungere la stessa quantità ad entrambi i membri di una equazione).

Lo scopo dell'algebra consiste nella risoluzione di **equazioni e sistemi di equazioni simboliche**, cioè contenenti quantità che a priori possono avere qualunque significato numerico.

Oggi queste quantità vengono indicate con lettere: ad esempio la **x** e la **y** indicano tradizionalmente due incognite.

Inizialmente però il procedimento simbolico non era utilizzato, e tutto veniva espresso a parole.

Nell'opera dantesca non si trovano diretti riferimenti alla risoluzione di equazioni, eppure non ci sarà difficile trovare persino l'algebra, quando infatti il poeta e Beatrice giungono nel **Primo Mobile**, (le stelle fisse, stelle più lontane o appunto *primo mobile*) così Beatrice spiega a Dante:

**«Non è suo moto per altro
distinto, ma li altri son mensurati
da questo, sì come diece da
mezzo e da quinto»**

(Par. XXVII, 115-117)

Cioè: il movimento del Primo Mobile (del quale si parla a proposito della cosmologia dantesca) non è determinato dal movimento di qualcos'altro, ma tutti gli altri moti ricevono la loro misura da esso, e si ragguagliano ad esso così come...

come esprimere la sincronizzazione del moto delle sfere celesti con quello del Primo Mobile?

Il Sommo Vate non può che ricorrere ad una similitudine matematica: **come il dieci è misurato dalla sua metà e dalla sua quinta parte.**

«**Misurato**» qui sta per "ottenuto tramite moltiplicazione".

E qual è il numero che è "misurato" in tal modo dal suo mezzo e dalla sua quinta parte?

Indichiamo tale numero con x . La sua metà è $x/2$, la sua quinta parte è $x/5$, dunque se ne ricava

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{5} = x$$

$$x^2 - 10x = 0$$

Si tratta di un'equazione di secondo grado spuria, le cui soluzioni sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 10$. La prima è ovviamente non accettabile; se ne conclude così che **l'unico numero "misurato" dalla sua metà e dalla sua quinta parte è proprio il "diece"**. Come volevasi dimostrare!

NOTA: Il **primo mobile** (o in [latino](#) *primum mobile*) è, secondo l'[astronomia medioevale](#) e [rinascimentale](#), la prima e più esterna delle [sfere cosmiche](#) ruotanti attorno alla Terra in base al modello [geocentrico](#) dell'[universo](#), dalla quale parte il movimento che mette in moto le [stelle](#) e i [pianeti](#). Il concetto fu introdotto da [Aristotele](#), il quale riteneva che i corpi celesti si muovessero su [sfere](#) concentriche, aventi la Terra come proprio [centro di rotazione](#). Questi pianeti situati oltre la Terra, secondo una concezione astronomica fatta propria anche da [Platone](#), erano in tutto sette, ed erano in ordine: la [Luna](#), [Mercurio](#), [Venere](#), il [Sole](#), [Marte](#), [Giove](#), e [Saturno](#). L'ultimo [cielo](#) era infine quello contenente le [stelle fisse](#), stelle più lontane o appunto *primo mobile*, che metteva tutti gli altri cieli in movimento. Si trattava del *primo cielo*, cioè dell'involucro più esterno dell'universo, su cui le stelle erano come incastonate. Esso risulta mosso direttamente dalla *causa prima* o [primo motore](#), identificabile con la [divinità](#) suprema, cioè tende a Dio come propria *causa finale*. Dal Primo Mobile, che si rende a sua volta [motore](#), il [movimento](#) viene trasmesso progressivamente a tutte le altre sfere, trasformandosi da circolare-uniforme in [rettilineo](#).



[Mappa mundi](#) medioevale con [nove cieli](#) rappresentati come cerchi concentrici di colore diverso, all'interno dello [zodiaco](#) ([Giusto de' Menabuoi](#), dalla *Creazione del mondo* del [battistero di Padova](#))

Saltiamo i fecondi sviluppi che ha avuto la Matematica nel tempo fino a metà ottocento, quando i matematici cominciarono a studiare le proprietà delle funzioni astratte, specificate non da una formula, ma dal loro comportamento.

Questo approccio si rivelò particolarmente fecondo nello sviluppo del calcolo infinitesimale, nel quale **Riemann** parlò del raggiungimento di "un punto di svolta nella concezione di **infinito**."

E proprio di infinito ora vogliamo parlare. L'**infinito** è uno dei concetti matematici che più frequentemente ritorna nelle opere dei grandi letterati, soprattutto in epoca romantica.

Basti pensare al celeberrimo "**Infinito**" di **Giacomo Leopardi**.

E chi più di **Dante**, fra tutti i poeti che annovera la millenaria storia della letteratura italiana, si è trovato nella necessità di spiegare ai suoi lettori il **concetto di infinito**, dato che tutto, nel suo *Oltremondo*, sembra essere caratterizzato dal fatto di non avere fine?

Non ha fine né il tormento dei dannati né la beatitudine dei salvati; non ha fine il Cielo Empireo, non ha fine la Bontà di Dio, e ovviamente sembra non avere fine neppure ...

il **numero degli Angeli**.



E veniamo, infatti, al titolo di questo piccolo saggio....

Per dirci quanto numerosi sono gli angeli ricorre nel canto XXVIII a questi due versi:

*E poi che le parole sue restaro,
non altrimenti ferro disvavilla
che bolle come i cerchi sfavillaro.*

*L'incendio suo seguiva ogni
scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi
s'inmilla.*

(Par. XXVIII, 91-93)

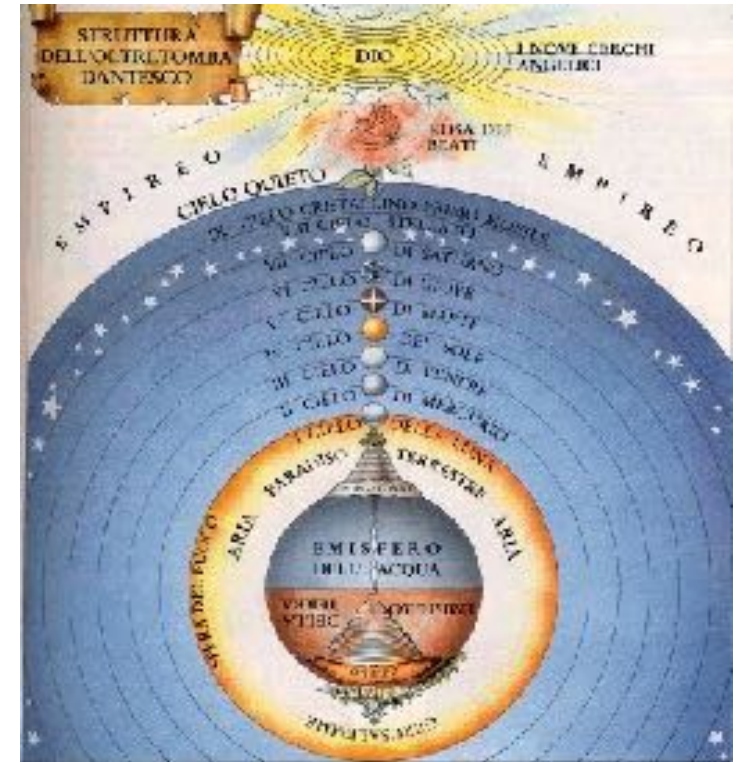
Scindendo l'incendio nelle sue parti, lo moltiplica. *Ognuna delle scintille girava nel senso del cerchio sfavillante di cui faceva parte:* le scintille sono gli angeli che costituiscono i cerchi.

Cioè, ogni singola scintilla girava assieme al cerchio di fuoco; ed erano tanto numerose, che il loro numero diventava di tante migliaia più della progressione numerica in base alle caselle della scacchiera.

Anche Dante osserva, dunque, le categorie angeliche che presiedono ai nove cieli del Paradiso, disposte secondo nove cerchi concentrici in perpetuo movimento: da ognuno di essi, i cori angelici sfavillano come ferri incandescenti; un numero strabiliante di scintille si stacca dal proprio cerchio, in modo che gli angeli si distinguano uno a uno, pur continuando a seguirne il movimento.

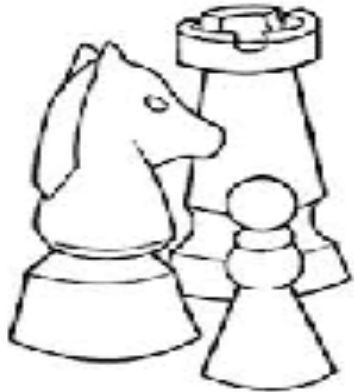


I cori angelici, incisione dall'edizione della Divina Commedia pubblicata da Bernardino Benalio e Matthio da Parma, Biblioteca Nazionale di Firenze



Qui giungiamo al punto che ci interessa, perché spesso i teologi si sono interrogati sul reale numero delle creature angeliche, senza riuscire ad andare al di là di termini come "innumerevoli", "in numero sterminato", "incalcolabili", e via elencando.

Ora Dante vuole rendere l'immagine di un numero grandissimo, tendente ad infinito, così alto che la classica numerazione romana (basata su I, V, X, L, C, D, M) non può esprimerlo. Per riuscirci, con la sua genialità artistica ha deciso di far ricorso proprio all'universo della Matematica. Ma il concetto di passaggio al limite per x tendente all'infinito non era noto a quell'epoca; e così la possente fantasia dantesca, strettamente legata al potere visivo delle parole, fa ricorso ad un episodio legendario, legato nientemeno che alla storia degli **scacchi**.



Cosa c'entrano gli scacchi con l'infinito?

Ora lo scopriremo. Com'è noto, le origini degli scacchi si perdono nella notte dei tempi e nessuno può dire con certezza dove e quando furono inventati in **Persia** o in **India**.

Si narra che lo **Shah di Persia** chiese al matematico **Sissa Nassir** di inventare qualche nuovo passatempo per distrarlo e fargli così dimenticare il lutto subito, la perdita di un figlio. Lieto perché Sissa Nassir gli aveva fatto un così bel dono, gli disse: « *Come ricompensa chiedimi ciò che vuoi, e l'avrai!* »

A quel punto Sissa Nassir rispose: « *O Re dei Re, prendi la scacchiera che ti ho donato e poni su di essa un chicco di grano nella prima casella, due nella seconda, quattro nella terza, otto nella quarta, e via raddoppiando fino alla sessantaquattresima; metti tutto il grano in un sacco e dammelo.* »

Allo Shah la richiesta apparve lì per lì esageratamente modesta, e gli propose invece di donargli una provincia del suo impero, ma Sissa Nassir fu irremovibile.

Dopo due settimane di calcoli, i contabili furono ricevuti dall'imperatore, che chiese loro se avessero terminato il calcolo; essi annuirono. *«Bene. Quanto grano ha chiesto Sissa Nassir? Ce n'è abbastanza nei granai reali per accontentarlo?»*

A questo punto il capo dei contabili rispose: *«Mio signore, per dare a Sissa Nassir tutto il grano che ha richiesto, tu dovresti spianare tutte le montagne della Terra, tagliare tutte le foreste, colmare tutti i mari, prosciugare tutti i fiumi, mari, oceani, ghiacciai, radere al suolo tutte le città, e coltivare a grano l'intera superficie della Terra.»*

Lo Shah restò di stucco: evidentemente non aveva idea di quanto sia vertiginosa la crescita di una **funzione esponenziale**. Perciò, si sentì preso in giro e, anziché premiarlo, **gli fece mozzare la testa, ottenendo tra l'altro un enorme risparmio.**



Il calcolo del numero di chicchi di grano

Il calcolo del numero di chicchi di grano non è difficile se si conoscono le progressioni geometriche.

NOTA: Si dice progressione geometrica una successione di numeri tale che il rapporto tra un termine della successione e il precedente sia costante. Il rapporto costante si chiama *ragione* e si indica con q .

Ad esempio la successione: $\{3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072, 6144 \dots\}$,
perché: $6/3 = 2$; $12/6 = 2$; $24/12 = 2 \dots$ e così via.

I chicchi, sulle caselle numerate da 0 a 63, sono: 2^0 , 2^1 , 2^2 ,
.... 2^{63} .

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Applicando la formula per la somma dei termini di una **progressione geometrica di ragione**

cioè all'incirca 18 trilioni e mezzo (18 e mezzo miliardi di miliardi!).

Si tratta indiscutibilmente di un risultato mostruosamente grande, che nel nostro sistema di numerazione richiede 20 cifre per essere scritto.

L'unico modo per esprimerlo in lingua italiana è il seguente: *18 miliardi di miliardi, 446 milioni di miliardi, 744 milioni di milioni, 73 miliardi, 709 milioni, 551 mila e 615.*

Con una scrittura più compatta, oggi si preferisce la notazione cosiddetta scientifica (esponenziale): $1,8447 \cdot 10^{19}$.

E' difficile immaginare quanto sia grande il numero di chicchi di grano ottenuto dai calcoli precedenti. Per questo proponiamo di distribuire i chicchi idealmente sulla superficie terrestre per calcolarne la densità.

Immaginiamo di voler distribuire sulla superficie terrestre i chicchi di grano che il re di Persia avrebbe dovuto dare all'inventore degli scacchi, per calcolarne la densità superficiale.

Naturalmente supporremo la Terra perfettamente sferica (e priva di montagne, valli, oceani..!).

Riportiamo i dati e le formule necessarie per effettuare il calcolo:

- raggio medio della Terra: $6.37 \cdot 10^6 \text{ m} = 6.37 \cdot 10^8 \text{ cm}$
- superficie di una sfera: $4\pi r^2$

Se ne deduce che la superficie della Terra è: $4 \pi (6,37 \times 10^8)^2 \text{ cm}^2 = 5,1 \times 10^{18} \text{ cm}^2$ Tenendo conto del numero di chicchi ottenuto troviamo, che la densità è:

$$\frac{18,447 \times 10^{18} \text{ chicchi}}{5,1 \times 10^{18} \text{ cm}^2} = 3,62 \frac{\text{chicchi}}{\text{cm}^2}$$

Se ne deduce che la superficie terrestre risulterebbe completamente coperta dai chicchi!

Se volete rendervi conto in un altro modo della enormità dei numeri coinvolti nel calcolo dei chicchi di grano, provate ad immaginare di mettere sulla prima casella della scacchiera una moneta da 1 euro, sulla seconda 2 monete, sulla terza 4, e così via e chiedetevi quanto sarà alta la pila di monete sulla sessantaquattresima casella (1 moneta da 1 euro ha uno spessore di circa 2 mm).

Il conto è presto fatto: nella sessantaquattresima casella ci sono
**monete che, moltiplicando per 2 mm., danno una colonna alta
18 446 744 073 709 551 616 mm.**

Ovvero circa **18500 miliardi di chilometri**, una distanza pari a circa **2 anni luce**, la metà della distanza tra la Terra e Proxima Centauri, la stella più vicina a noi, dopo il Sole!

NOTA: L'anno luce (ly o al) è un'unità di misura della lunghezza, definita come la distanza percorsa dalla radiazione elettromagnetica (luce) nel vuoto nell'intervallo di un anno.

L'anno luce è un'unità di misura che si usa in astronomia. Cioè, **corrisponde alla distanza percorsa dalla luce nell'intervallo di un anno.**

Siccome la luce viaggia nello spazio ad una velocità di circa **300.000 chilometri al secondo**, dunque **un anno luce corrisponde a circa 9.461 miliardi di chilometri.**

Più esattamente, considerando l'anno giuliano della durata di 365,25 giorni, mediamente di 86 400 secondi ciascuno, pari in totale a 31 557 600 secondi all'anno.

Poiché la velocità della luce nel vuoto (c) è pari a 299 792,458 chilometri al secondo (km/s), un anno luce corrisponde a 9 460 730 472 581 km, cioè:

vale a dire circa 63073 volte la distanza fra la Terra e il Sole.
(nota come unità astronomica).

Infatti, la luce impiega circa 8,33 minuti (8 min 19,8 s) per viaggiare dal Sole alla Terra.

La Distanza Terra - Sole sarà allora circa:
essendo il tempo=

distanza Terra - Sole = (149.600.000 km)

(Perielio, Minima: 147.097.074 km; Afelio, Massima: 152.097.701 km)

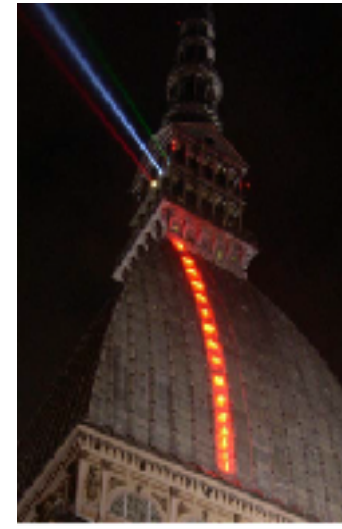
Rapporto volte la distanza tra la Terra e il Sole.

Il calcolo di Fibonacci

Leonardo Pisano detto il Fibonacci cioè figlio di Bonaccio

([Pisa](#), [settembre 1175](#) circa -

[Pisa](#), [1235](#) circa.)



In [matematica](#), la **successione di Fibonacci** è una [successione](#) di [numeri interi positivi](#) in cui ciascun numero è la somma dei due precedenti e i primi due termini della successione:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ... - in cui ogni termine, a parte i primi due, è la somma dei due che lo precedono.

Fibonacci non menziona la leggenda, ma calcola il numero dei chicchi di grano non raddoppiando ogni volta: 1, 2, 4, 8, 16, ...; ma in maniera ... più furba, in maniera più veloce che potrebbe estenderlo ad una scacchiera con un numero arbitrario di caselle e non limitato a “soli” 64.

Comincia a calcolare i primi otto numeri, cioè quella della prima riga della scacchiera; la loro somma $1+2+4+8+16+32+64+128 = 255$ è minore di 1 del numero successivo (256) che corrisponde al primo numero della seconda riga:

1	2	4	8	16	32	64	128
256							

I numeri della seconda riga sono uguali a quelli della prima riga moltiplicati per 256, e dunque la loro somma è 256 volte quella dei numeri della prima riga, cioè :

$$256 \times (256 - 1).$$

Se a questo numero si aggiunge $(256-1)$, che è la somma dei chicchi di grano della prima riga, si ottiene:

$256 \times (256 - 1) + (256 - 1) = 256 \times 256 - 1 = 65.536 - 1$,
cioè il primo numero della terza riga meno 1.

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
65536							

Ora il ragionamento si ripete: i numeri della terza e quarta riga sono uguali a quelli della prima e seconda riga, moltiplicati per 65.536. La loro somma sarà allora:

$65.536 \times (65.536 - 1)$, e aggiungendo $(65.536 - 1)$, che è la somma dei chicchi di grano delle prime due righe, si trova il **totale di chicchi di grano delle prime quattro righe: $65.5356 \times 65.536 - 1 = 4.294.967.266 - 1$.**

Essendo segue, pertanto, che moltiplicando (o elevando al quadrato) questo numero per sé stesso avremo:

che supera di 1 la somma di tutti i numeri della scacchiera, ossia di tutti i chicchi di grano.

Per farsi una idea di questo numero, Fibonacci calcola quante navi si potrebbero riempire con tutto questo grano. Per questo, Fibonacci usa le unità di misura pisane: una nave porta 500 moggi pisane, che pesano 24 sestari ognuno; un sestario è composto di 140 libbre, ognuna di 12 once, le quali a sua volta valgono ciascuna 25 denari, ognuna dei quali è costituito da 24 grani di frumento.

In totale, calcolando $550 \times 24 \times 140 \times 12 \times 25 \times 24$, una nave contiene grosso modo 12 miliardi di chicchi di grano. Il risultato è stupefacente: si caricherebbero **1.525.028.445 navi**, cioè **più di un miliardo e mezzo di navi**; *“il quale numero, dice Fibonacci, è apparentemente innumerabile e quasi infinito”*.

Ma, infine, quanti Angeli ci sono per Dante? Quale numero si otterrebbe ...
“inmillando”? (per 1.000?)

Praticamente, per sapere quanti angeli intende Dante, sulla prima casella della scacchiera dobbiamo mettere un angelo, sulla seconda ne mettiamo non due ma mille, sulla terza mille per mille, cioè un milione, sulla quarta un milione per mille, cioè un miliardo, e così via fino alla sessantaquattresima casella. In tal modo *gli angeli invece che raddoppiare si inmillano; (...più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla.)*

Dunque il problema di Sissa Nassir si trasforma in quello di trovare la somma dei primi 64 termini di una progressione geometrica il cui primo termine è 1 e la ragione vale 1000.

La formula $S_n = a_1(q^n - 1)/(q - 1)$ ci dà allora:

$$\begin{aligned} S_{64} &= 1(1000^{64} - 1) / (1000 - 1) \\ &= (10^{192} - 1) / 999 \\ &\approx 1,001 \cdot 10^{189} \end{aligned}$$

Un numero divino eppure finito. Pare che Dante, ormai vecchio, tentò a Ravenna un abacista capace di calcolare “inmillando” da 1 e per 63 volte, ma nessun matematico medievale avrebbe saputo calcolare che da quel fuoco paradisiaco nascessero tanti angeli:

1 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001
001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001
001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001
001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001 001.



2. CALCOLO DELLE PROBABILITA'

Ai tempi di Dante, questa moderna disciplina era del tutto sconosciuta. Eppure, si trova in particolare un passo molto famoso e citato che si colloca in questa nuova scienza.

Un po' di Storia del Calcolo delle Probabilità...

Il primo ad occuparsi di una analisi matematica delle probabilità fu probabilmente l'algebrista e medico **Gerolamo Cardano (1501-1576)**, che a quanto pare fu travagliato per tutta la vita dai problemi economici, e per risolverli si dedicò ai giochi d'azzardo.

Anche quel genio di **Galileo Galilei** scrisse un libello *"Sulla scoperta dei dadi"*, pubblicato postumo nel 1656.

La paternità del moderno calcolo delle probabilità è però divisa equamente fra i francesi **Blaise Pascal (1623-1662)** e **Pierre de Fermat (1601-1665)**.

Com'è noto, gli studi di Pascal presero avvio dai problemi che gli poneva uno dei suoi amici, il **Cavaliere de Méré**, accanito giocatore d'azzardo.



**Blaise
Pascal**



Pierre de Fermat

*« Quando si parte il gioco de la zara,
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara;
con l'altro se ne va tutta la gente;
qual va dinanzi, e qual di dietro il
prende, e qual dallato li si reca a
mente;
el non s'arresta, e questo e quello
intende;
a cui porge la man, più non fa pressa;
e così da la calca si difende.
Tal era io in quella turba spessa,
volgendo a loro, e qua e là, la faccia,
e promettendo mi sciogliea da essa. »*

(Purg. VI, 1-12)

Dante intende dirci che, “quando ha termine (“si parte”) il gioco della zara, il perdente rimane addolorato e cerca di imparare a fare meglio la prossima volta, ripassando nella memoria le cattive puntate che ha fatto, e quelle buone che non ha fatto, mentre tutti se ne vanno (naturalmente) con il vincitore, sperando di approfittare della sua euforia e della sua generosità”.

Leggiamo infatti l'esordio del **Canto VI del Purgatorio**, nel quale **Dante** e **Virgilio** devono districarsi a fatica dalla ressa delle anime dei negligenti periti di morte violenta, che si affollano intorno a loro - come i postulanti che fanno cerchio intorno a chi esce vittorioso dal gioco d'azzardo - invocando preghiere e suffragi perché venga abbreviata la loro permanenza nell'Antipurgatorio.

La similitudine è tratteggiata con grande realismo, attraverso il racconto di una scenetta di vita quotidiana, a cui il Poeta dovette certamente assistere più volte lungo le strade.

In questi versi alcuni commentatori hanno voluto riconoscere un primo abbozzo, per quanto ingenuo, di calcolo delle probabilità: dall'atteggiamento del giocatore perdente che riflette sulla frequenza delle uscite di certi numeri, emerge il concetto embrionale di **frequenza di un evento casuale**.

Come si vede, al tempo di Dante un calcolo esatto delle probabilità non esisteva ancora, ma siccome il gioco d'azzardo è vecchio quanto il mondo, sicuramente esistevano già conoscenze empiriche intorno alle probabilità che si avevano di vincere giocando in un certo modo.

Certamente il gioco d'azzardo più diffuso era quello dei dadi, la cui origine è sconosciuta, ma probabilmente asiatica.

Questo gioco era inoltre popolarissimo presso i Romani: quando volle dare inizio alla sua ribellione contro il Senato varcando il Rubicone, **Giulio Cesare** sbottò nella celebre esclamazione "**Alea jacta est!**" ("**il dado è lanciato!**"), e persino sul **Golgotha** la veste di **Gesù Cristo** fu giocata ai dadi tra i soldati romani.



Achille e Aiace giocano ai dadi, particolare di un vaso greco del VI sec. a.C., Musei Vaticani

Il **gioco della zara** (“zahr” (dado) da cui appunto “azzardo”) era diffusissimo nel Trecento, e si giocava **gettando tre dadi** e tentando di indovinare i numeri risultanti dalle loro possibili combinazioni. I valori ottenibili sono **16** ovviamente, quelli che vanno **da 3 a 18** “; ma, per regola, **3, 4, 17 e 18 erano considerati “neutri”** e sui quali i giocatori non potevano puntare.

Dalla moderna analisi del gioco si ricava che il **10 e l'11 sono i numeri che hanno probabilità maggiori di uscire**, **mentre il 3 e il 18 hanno quella minore**.

Questi ultimi due infatti **si possono ottenere solo con tre uni o con tre sei**.

Il caso favorevole è dunque uno solo; quanti sono quelli possibili?

A ciascuna delle sei facce del primo dado va associata ciascuna faccia del secondo e ciascuna faccia del terzo, per cui questi casi sono in tutto $6 \times 6 \times 6 = 216$. Secondo la definizione classica di **Pascal**, **la probabilità è pari ad $1/216$** . Il **4** ha **probabilità di uscita tripla**, perché esso si può ottenere con una delle seguenti combinazioni di risultati: **$\{1,1,2\}$ o $\{1,2,1\}$ o $\{2,1,1\}$** . **Sono tre casi favorevoli, mentre i casi possibili restano 216**, e quindi la probabilità è **$3/216 = 1/72$** . Nel Medioevo tuttavia **questi tre casi erano considerati uno solo** (due dadi che danno 1 ed uno che dà 2), e quindi il punteggio **4 era considerato nullo** perché, come il tre, proveniva da una sola combinazione possibile di eventi.

Fra Giovanni da Serravalle, traduttore della Commedia classifica i punti nel gioco della Zara:

Rare veniunt (sortiscono raramente):

- il **5**, da un dado con il **3** e due con l'**1**; o da due dadi con il **2** e uno con l'**1** (**due "volte"** in tutto), cioè: **(3,1,1) o (2,2,1)**
- il **6**, da un dado con il **4** e due con l'**1**; o da uno con il **3**, uno con il **2**, uno con l'**1**; o da tre dadi con il **2** (**tre "volte"** in tutto); **(4,1,1) o (3,2,1) o (2,2,2)**
- il **15**, da due dadi con il **6** e uno con il **3**, o da uno con il **6**, uno con il **5**, uno con il **4**: o da tre dadi con il **5** (**tre "volte"** in tutto): **(6,6,3) o (6,5,4) o (5,5,5)**
- il **16**, da un dado con il **4** e due con il **6**; o da due dadi con il **5** e uno con il **6** (**due "volte"** in tutto); **(4,6,6) o (5,5,6)**

Rarius veniunt (sortiscono ancora più raramente):

- il 3, da tre dadi con l'1 (una "volta"); (1,1,1)
- il 4, da un dado con il 2 e due con l'1 (una "volta"); (2,1,1)
- il 17, da un dado con il 5 e due con il 6 (una "volta"); (5,6,6)
- il 18, da tre dadi con il 6 (una "volta"); (6,6,6)

A questo punto si può facilmente intuire la motivazione che determinò nel gioco la regola dell'esclusione dei numeri 3, 4, 17 e 18, dal momento che qualsiasi giocatore non sprovveduto non avrebbe mai puntato su quei numeri, in quanto la semplice esperienza sulle frequenze delle terne di numeri (« *repetendo le volte* ») insegnava che quei numeri non potevano che sortire molto più raramente degli altri; da qui l'inutilità di considerarli parte del gioco.

Continuando con questo ragionamento puramente empirico:

il **7** poteva sortire **quattro volte**: {5,1,1}; {4,2,1}; {3,3,1}; {3,2,2}

l'**8** poteva sortire **cinque volte**: {6,1,1}; {5,2,1}; {4,3,1}; {4,2,2}; {3,3,2}

il **9** poteva sortire **sei volte**: {6,2,1}; {5,3,1}; {5,2,2}; {4,4,1}; {4,3,2}; {3,3,3}

il **10** poteva sortire **sei volte**: {6,3,1}; {6,2,2}; {5,3,2}; {5,4,1}; {4,4,2}; {4,3,3}

l'**11** poteva sortire **sei volte**: {6,4,1}; {6,3,2}; {5,5,1}; {5,4,2}; {5,3,3}; {4,4,3}

il **12** poteva sortire **sei volte**: {6,5,1}; {6,4,2}; {6,3,3}; {5,5,2}; {5,4,3}; {4,4,4}

il **13** poteva sortire **cinque volte**: {6,6,1}; {6,5,2}; {6,4,3}; {5,5,3}; {5,4,4}

il **14** poteva sortire **quattro volte**: {6,6,2}; {6,5,3}; {6,4,4}; {5,5,4}.

Il numero totale delle "volte" è pari a $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 6 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 = 56$, numero che ritroveremo nel seguito.

Come si vede dal nostro elenco, **il 9, il 10, l'11 e il 12 erano tutti ottenibili da sei "volte"**. Eppure, i giocatori esperti sapevano che **il 10 e l'11 escono più frequentemente del 9 e del 12: come mai?**

Il primo a rispondere correttamente fu **Galileo**. Rivediamo perché:

Il **9** si ottiene con le sei combinazioni (1,2,6), (1,3,5), (2,3,4), (1,4,4), (2,2,5), (3,3,3);

il **10** con le sei combinazioni (1,3,6), (1,4,5), (2,3,5), (2,2,6), (2,4,4), (3,3,4);

l'**11** con (1,4,6), (2,3,6), (2,4,5), (1,5,5), (3,3,5), (3,3,4);

il **12** con (1,5,6), (2,4,6), (3,4,5), (2,5,5), (3,3,6), (4,4,4).

Tuttavia, mentre una combinazione di tre numeri uguali può presentarsi in un solo modo, una con due numeri uguali può presentarsi in tre modi diversi e una con tre numeri diversi in sei modi diversi.

Es: (3,3,3) - un solo modo- Es: 1,4,4: (1,4,4), (4,1,4), (4,4,1) - tre modi diversi

Es: i tre numeri 1,3,6: (1,3,6), (1,6,3), (3,1,6), (3,6,1), (6,1,3), (6,3,1) - sei modi diversi

Si può quindi ottenere il 10 e l'11 in 27 modi (6+6+6+3+3+3);

mentre il 9 e il 12 in 25 modi (6+6+6+3+3+1).

Numero modi diversi: 1+3+25+27= 56, come già detto

La casistica completa di Galileo

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
(6,6,6) 1	(6,6,5) 3	(6,6,4) 3	(6,6,3) 3	(6,6,2) 3	(6,6,1) 3	(6,5,1) 6	(6,4,1) 6	(6,3,1) 6	(6,2,1) 6	(6,1,1) 3	(5,1,1) 3	(4,1,1) 3	(3,1,1) 3	(2,1,1) 3	(1,1,1) 1
		(6,5,5) 3	(6,5,4) 6	(6,5,3) 6	(6,5,2) 6	(6,4,2) 6	(6,3,2) 6	(6,2,2) 3	(5,3,1) 6	(5,2,1) 6	(4,2,1) 6	(3,2,1) 6	(2,2,1) 3		
			(5,5,5) 1	(6,4,4) 3	(6,4,3) 6	(6,3,3) 3	(5,5,1) 3	(5,4,1) 6	(5,2,2) 3	(4,3,1) 6	(3,3,1) 3	(2,2,2) 1			
				(5,5,4) 3	(5,4,4) 3	(5,4,3) 6	(5,4,2) 6	(5,3,2) 6	(4,4,1) 3	(4,2,2) 3	(3,2,2) 3				
					(5,3,5) 3	(5,2,5) 3	(5,3,3) 3	(4,4,2) 3	(4,3,2) 6	(3,3,2) 3					
						(4,4,4) 1	(4,4,3) 3	(4,3,3) 3	(3,3,3) 1						
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

“la somma di tutte le scoperte possibili a farsi con le facce dei 3 dadi è 216”

$$(1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 25 + 27) \times 2 = 216$$

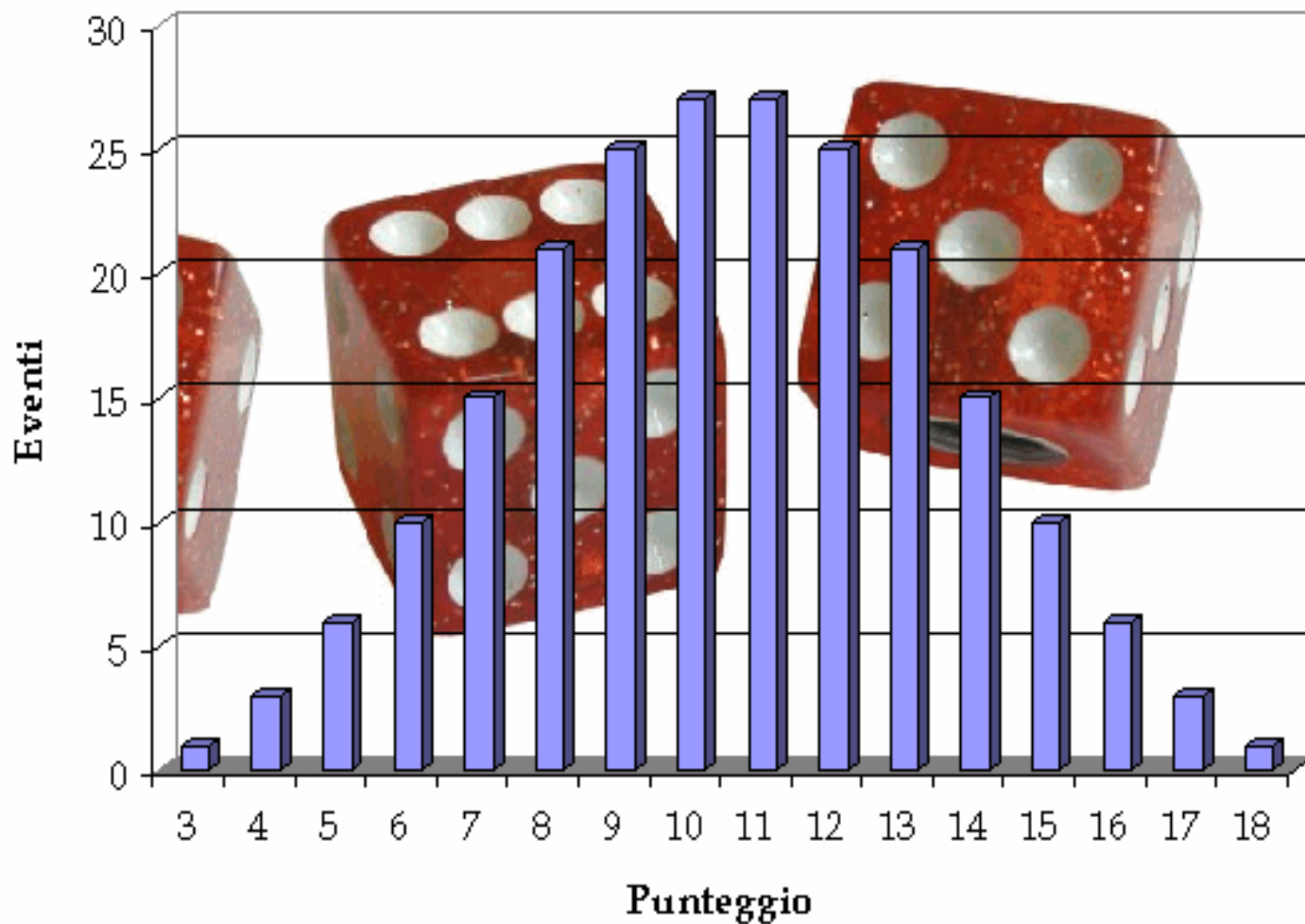
**Conviene scommettere sull'uscita dell'11 o del 10,
piuttosto che su quella del 12 e del 9!**



TAVOLA VANTAGGIOSA PER I GIOCATORI



Si noti come questa tabella sia manifestamente
simmetrica



Dal momento che **10** e **11**
sono ottenibili tramite **27**
eventi su 216;

mentre **9** e **12** tramite **25**
eventi su 216;

Galileo Galilei ha risolto nel
1656 brillantemente il
problema, confermando la
previsione degli incalliti
giocatori di zara!

Definizione classica

Secondo la prima definizione di probabilità, per questo detta *classica*, la probabilità di un evento è *il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano tutti equiprobabili, cioè di eventi che presentano caratteri di regolarità e simmetria tali da far ritenere che la probabilità del verificarsi di essi sia, a parità di condizioni, sensibilmente costante; per es., nel lancio di un dado esattamente cubico di materiale omogeneo*

Per parlare in termini di probabilità (in senso classico) come la hanno concepita **Pascal** e **de Fermat**, siccome i **casi possibili totali sono 216 (6x6x6)**, se ne deduce che:

3 e 18 si presentano con probabilità $1/216 = 0,46 \%$ Verifica:

4 e 17 con probabilità $3/216 = 1/72 = 1,39 \%$

5 e 16 con probabilità $6/216 = 1/36 = 2,78 \%$

6 e 15 con probabilità $10/216 = 5/108 = 4,63 \%$

7 e 14 con probabilità $15/216 = 5/72 = 6,94 \%$

8 e 13 con probabilità $21/216 = 7/72 = 9,72 \%$

9 e 12 con probabilità $25/216 = 11,57 \%$

10 e 11 con probabilità $27/216 = 1/8 = 12,5 \%$

$$(1+3+6+10+15+21+25+27)*2=216$$

Si osservi come **la somma di tutte le probabilità dia $216/216 = 100 \%$.**

Si dice che lo spazio delle probabilità è normalizzato:
la loro somma totale deve dare l'unità.

Si consideri infatti una moneta: una volta lanciata, essa può dare solo "testa" o "croce".

La probabilità che esca "testa" è $1/2 = 50 \%$ (un caso favorevole sue due possibili).

Anche la probabilità che esca "croce" è $1/2 = 50 \%$. La loro somma dà $2/2 = 100 \%$; ciò si esprime dicendo che il fatto che esca "testa o croce" è un **evento certo, quindi $p=1$**

Al contrario, il fatto che non esca "né testa né croce" è $0/2 = 0 \%$: si parla in tal caso di **evento impossibile**.

Nel nostro caso, il fatto che lanciando tre dadi si ottenga 1 (o 2, o 19, o 20) rappresenta un **evento impossibile, quindi $p=0$.**

3. Geometria

La parola "geometria" in greco significa "misura della terra".

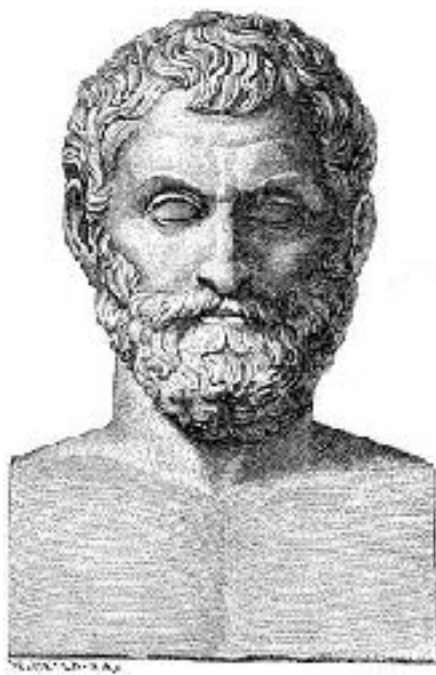
Gli antichi Greci le diedero questo nome ma ad idearla erano stati gli antichi Egizi: ogni volta che il Nilo inondava i campi, si rendeva necessario misurare di nuovo gli appezzamenti di terra onde ripristinare i confini di proprietà.

Furono proprio i Greci a trasformare la geometria in una scienza astratta, che studia figure ideali come quadrati e cerchi perfetti, e non appezzamenti di terra di forma quadrata o circolare. I primi grandi nomi di questa scienza a partire da **Talete di Mileto** (624-547 a.C.), «il primo scopritore della geometria», e **Pitagora di Samo** (575-495 a.C.), fondatore dell'omonima scuola a Crotone, cui si attribuisce la prima dimostrazione di quello che oggi infatti è noto come Teorema di Pitagora, empiricamente già noto in Egitto e in Mesopotamia.

Platone (428-348 a.C.) pose la geometria come fondamento degli studi filosofici, tanto da far scrivere sulla porta della sua scuola: «Nessuno ignaro della geometria entri qui».



**Pitagora,
(575-495 a.C.)
dettaglio
della [Scuola
d'Atene](#) (1511)
di [Raffaello Sanzio](#)**



**Talete di Milèto
(624-547 a.C.)**

**Platone
(428-348 a.C.)**



**Euclide di
Alessandria
(367-283 a.C.)**

Il vero "inventore" della geometria come oggi la conosciamo è però **Euclide di Alessandria** (367-283 a.C.), il quale nei suoi "**Elementi**", testo fondamentale per lo studio della geometria durante tutta l'età classica ed il Medioevo, e quindi anche per Dante, mostrò come tutti i teoremi e le proprietà delle figure piane e solide potessero essere ricavate induttivamente da pochi postulati stabiliti a priori.

Dante riconosce la posizione di rilievo di Euclide nella cultura medioevale incontrandolo nel Limbo insieme agli « spiriti magni » e associandolo a un altro grande scienziato dell'antichità, **Tolomeo**, del quale parla a proposito dell'astronomia dantesca:

« **Euclide geometra e Tolomeo** » (Inf. IV, 142)



*Euclide ritratto nella "Scuola d'Atene" di Raffaello con le
sembianze
di Donato Bramante
(Vaticano, Stanza della Segnatura, 1508-1511)*

Riportiamo solo alcuni riferimenti più importanti e noti di Geometria nella Divina Commedia:

IL PUNTO GEOMETRICO

Dante, in questi versi, per descrivere ai lettori la visione di Dio da lui avuta nel Paradiso, decide di far ricorso al concetto tutto euclideo di punto geometrico:

*“Un punto vidi che raggiava lume
acuto sì, che ‘l viso ch’elli affoca
chiuder conviensi per lo forte
acume;
e quale stella par quinci più
poca,
parrebbe luna, locata con esso
come stella con stella si collòca.”*

(Par. XXVIII, 16-21)

Quel punto emette una luce tanto intensa, che l'occhio da esso scottato è costretto a chiudersi per l'insostenibile luminosità da esso irraggiata; eppure, a Dante appare così piccolo che qualsiasi stella appaia minuscola ("poca") ai nostri occhi, mentre sembrerebbe grande come la luna piena, se fosse posta vicina ad essa.

Il punto euclideo è privo di dimensioni, quindi indivisibile e immateriale, e dunque secondo Dante è il simbolo più appropriato di Dio.

IL QUINTO POSTULATO DI EUCLIDE

*“O cara piota mia, che sì t’insusi,
Che come veggion le terrene
menti*

*Non capere in triangol due
ottusi,*

Così vedi le cose contingenti

*Anzi che sieno in sé, mirando il
punto*

A cui tutti li tempi son presenti”

(Par. XVII, 13-18)



V POSTULATO DI EUCLIDE.GGB

“Piota” è la pianta del piede in dialetto fiorentino, e quindi è una metafora per indicare “la mia radice”, cioè “il mio antenato”, **Cacciaguida**, descritto come colui che “si insusa”, cioè si innalza, al punto da conoscere gli eventi prima ancora che si avverino, leggendoli in Dio.

Del fatto che Cacciaguida possieda una capacità di chiaroveggenza Dante è sicuro: ne è certo tanto quanto del fatto che *in un triangolo non possono sussistere due angoli ottusi*. Infatti una delle formulazioni del famoso **Quinto Postulato di Euclide** è la seguente:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è pari ad un angolo piatto.

LA QUADRATURA DEL CERCHIO

Premessa.

Il più grande esperto di matematica e di geometria del mondo antico fu certamente **Archimede di Siracusa** (287-212 a.C.) che, oltre ad essere un grande fisico ed ingegnere, affrontò per primo problemi considerati ai suoi tempi insolubili come il calcolo delle aree e dei volumi della sfera e di parte della sfera, e gettò addirittura le basi del calcolo infinitesimale.

Il più famoso riferimento alla Geometria contenuto nella Divina Commedia è molto probabilmente uno dei problemi più dibattuti nella storia della Matematica: quello dell'**esatta misura della circonferenza**.

Archimede di Siracusa nella sua opera "**Misura del cerchio**" confrontò una serie di poligoni regolari inscritti e circoscritti: partendo dall'esagono e raddoppiando progressivamente il numero dei lati, si spinse fino a poligoni di 96 e provò che:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} \qquad 3.1408 < \pi < 3.1428$$

Nel 1220 **Leonardo Fibonacci** (1170-1240), uno dei massimi matematici del Medioevo, trovò con il metodo di Archimede il valore **3,141818**.

Lo svizzero Eulero (1707-1783) ipotizzò che π fosse anche trascendente, cioè che non potesse essere soluzione di alcuna equazione a coefficienti interi.



Archimede: Siracusa,
287 a.C. circa - Siracusa, 212
a.C.



Leonardo
Pisano detto il
Fibonacci



Eulero: 15 apr 1707 -
18 set 1783

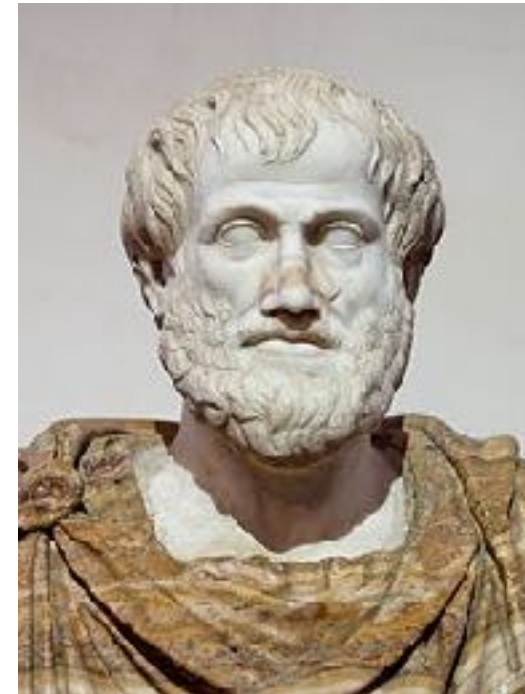
Dante sembra avere sentore del fatto che questa sorta di "corsa alle cifre decimali di pi greco", iniziata agli albori della storia umana, avrebbe rappresentato una sfida per i matematici di ogni epoca.

Studiando **Boezio e i Libri d'Abaco**, come ricordato, Dante aveva incontrato regole geometriche dove il più delle volte figuravano applicazioni pratiche adatte agli agrimensori o muratori o artigiani.

Pertanto, lo studio della geometria euclidea non poteva basarsi solo attraverso i maestri d'abaco più rozzi.

Dante forse ha dovuto intraprendere con coraggio lo studio di **Aristotele**, introdotto in Occidente e in Europa grazie agli Arabi, in arabo, ma proprio per questo accolto con estrema diffidenza.

Così, ha potuto conoscere e trattare temi di geometria.



Aristotele
Filosofo della
scienza
384 a.C. - 322
a.C.

Il richiamo più famoso è il seguente:

*Qual'è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non
ritrova,
pensando, quel principio ond'elli
indige,*

*tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne
l'imago al cerchio e come vi
s'indova;*

*ma non eran da ciò le proprie
penne:
se non che la mia mente fu percossa
da un fulgore in che sua voglia
venne.
Paradiso, XXXIII, 133-141*

Come lo studioso di geometria si concentra con tutte le sue facoltà mentali per risolvere **il problema della quadratura del cerchio**, e non riesce a trovare quel principio di cui avrebbe bisogno,

tale ero io dinanzi a quella straordinaria visione, che invano volevo capire come l'effigie umana si adattasse alla forma del cerchio e potesse trovarvi luogo;

ma le mie ali non erano capaci di farmi volare tanto in alto: se non che la mia mente fu percossa da una folgorazione, grazie alla quale il suo desiderio si compì.



Come lo studioso di geometria si concentra al massimo per risolvere il problema della quadratura del cerchio e non vi riesce perché gli manca quel teorema, così sono io...

Dante nell'ultimo canto della Commedia riflette sulla difficoltà a comprendere l'incarnazione

La quadratura del cerchio (così come l'incarnazione di Cristo) non è impossibile da ottenere in linea di principio, ma diventa impossibile se ci si limita all'utilizzo di determinati strumenti.

Stavolta però il riferimento all'impossibile quadratura del circolo non è certo casuale:

ci troviamo nell'ultimo Canto del Paradiso, al sommo dell'Empireo, e la «**vista nova**» (cioè la **straordinaria visione**) che Dante si trova di fronte è **Dio** stesso.



*La Visione di Dio, Nino e Silvio de Gregori,
dall'edizione del "Paradiso" di "Famiglia
Cristiana",
Società San Paolo, 1992*

Cosa voleva dire Dante?

Siamo alla conclusione dell'ultimo canto della Commedia, certamente tra i più intensi e alti del poema, dove Dante si trova solo come all'inizio nella selva oscura

Ma per capire, dobbiamo richiamare prima gli ultimi versi precedenti:

**Invocazione di Dante: visione
dell'unità dell'Universo
(Paradiso XXXIII - 67-108)**



**G. Di Paolo, L'ombra
d'Argo**

Dante invoca la luce di Dio affinché essa gli consenta di ricordare in minima parte come essa gli si mostrò al momento della visione, e renda il suo linguaggio tale da poter lasciare ai posteri almeno una scintilla della Sua gloria, cosicché le parole del poeta possano esprimere la vittoria divina. **Il poeta acquista coraggio per sostenere quella straordinaria visione e addentra così il suo sguardo nell'infinito.** Dante continua a tenere lo sguardo fisso nella luce divina, essendo impossibile volgere gli occhi altrove, poiché tutto il bene possibile è racchiuso in essa e ciò che lì è perfetto, al di fuori è difettoso.

Il mistero della Trinità (109-126)

Le preghiere di San Bernardo alla Vergine Maria per la sua intercessione presso Dio affinché Dante possa concludere il viaggio con la visione completa della sua grandezza, hanno acconsentito che Dante potesse spingere il suo sguardo fin dentro il **Mistero altissimo della Trinità Divina e dell'Incarnazione**.

E così, man mano che la sua vista si potenziava, il pellegrino celeste ha visto apparire **il Padre, il Figlio e lo Spirito Santo sotto forma di tre cerchi** (ecco perchè la similitudine del geometra non è scelta a caso!), « **di tre colori e d'una contenenza** » (Par. XXXIII, 117), cioè di diverso colore ma di uguale raggio, perchè **le Tre Persone della Santissima Trinità sono della stessa Natura ma diverse nei loro attributi**.



A. Nattini, La Trinità divina

Il mistero dell'Incarnazione (127-138)

Ad una osservazione ancora più acuta,

« la circolazion che si concetta / pareva in Te come lume riflesso » (Par. XXXIII, 127-128),

cioè il cerchio del Figlio che viene generato dal Padre come il riflesso generato da uno specchio, appare a Dante dipinto dentro di sé, del suo stesso colore, con l'immagine dell'uomo.

È questo il **Mistero dell'Incarnazione**, che Dante con le sole forze della sua ragione non può riuscire a penetrare, **esattamente come il geometra non riuscirà mai a rettificare il cerchio.**

Concentrato sul mistero dell'Incarnazione, Dante cerca di capire come l'immagine umana si collochi nel cerchio divino, e cioè come l'aspetto umano e l'aspetto divino siano congiunti nell'unica persona di Cristo.

Ma le possibilità della mente umana non arrivano a tanto: le sue ali non sono fatte per volare così in alto. E' la Grazia divina, perciò, che con un'illuminazione suprema si manifesta a Dante, appagando il suo desiderio di conoscenza.

Nella similitudine con il geometra (studioso di geometria), si allude alla incommensurabilità tra il diametro e la circonferenza del cerchio e quindi alla impossibilità di misurare (se non per approssimazione) la circonferenza.

Il riferimento matematico

Il problema a cui fa riferimento Dante è quello della **quadratura del cerchio**, uno dei problemi insoluti dalla geometria greca.

Dante sembra propendere, in questi versi, per la insolubilità di questo problema, considerato che lo paragona a quello di comprendere il mistero dell'Incarnazione.

Tale problema è divenuto così importante da essere entrato nei modi di dire per esprimere la miracolosa soluzione di un problema, tanto miracolosa che non si riesce mai ad ottenerla.

La quadratura del circolo. Cenni storici

Che cos'è esattamente il problema della quadratura del cerchio?

Si può esprimere in due modi equivalenti:

- **Data una circonferenza, trovare un quadrato o un rettangolo il cui perimetro abbia la stessa lunghezza della circonferenza**
- **Dato un cerchio, trovare un quadrato o un rettangolo la cui area abbia la stessa estensione del cerchio.**

Ma questo calcolo riesce a svolgerlo anche un bambino di IV o V elementare.

Allora, dove sta l'impossibilità del problema?



In effetti, Dante ha sottinteso che **per motivi *estetici* i Greci intendevano solo le soluzioni “con riga e compasso”**.

Quindi, il **calcolo** è corretto ma **non è ottenuto con riga e compasso**.

Il problema in questione può essere formulato, usando il linguaggio della geometria, in questo modo:

Costruire, con riga e compasso:

- **un quadrato o un rettangolo il cui perimetro abbia la stessa lunghezza della circonferenza**
- **un quadrato o un rettangolo di area equivalente ad un cerchio di dato raggio.**

Ma perché allora è impossibile costruirlo con riga e compasso?

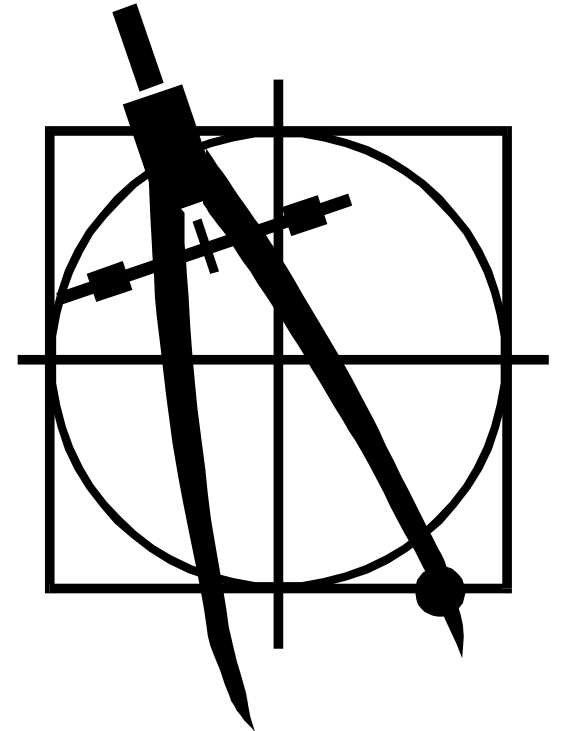
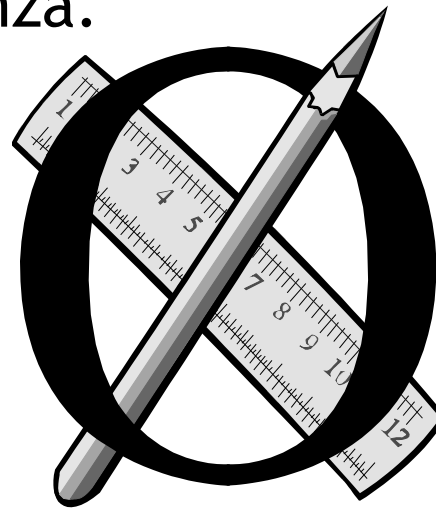
Non siamo abbastanza bravi o non è proprio possibile?

Come possiamo dimostrare l'impossibilità delle costruzioni richieste?

Cosa vuol dire risolubile con riga e compasso?

Con questa espressione si intende risolvere un problema geometrico utilizzando una sequenza finita di operazioni che rientrano tra le seguenti:

- 1) tracciare una retta per due punti assegnati;
- 2) costruire una circonferenza di centro e raggio fissati;
- 3) intersecare due rette;
- 4) intersecare due circonferenze;
- 5) intersecare una retta e una circonferenza.



Che cosa si può costruire con riga e compasso?

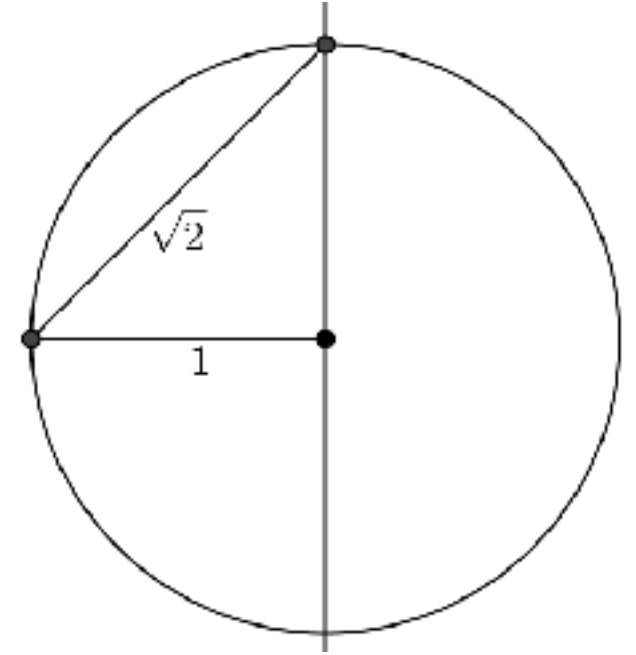
Sappiamo costruire i numeri razionali

Ma anche certi irrazionali

Le operazioni possibili sono:

- Disegnare rette e circonferenze
- Intersecare retta-retta, retta-circonferenza, circonferenze.

Ogni numero costruibile con riga e compasso si ottiene dai numeri razionali operando su essi con le 4 operazioni e l'estrazione di radice quadrata.



..\UNI3\UNI3-Dante e g.
azzardo\collegamenti file
dante\divisione di un
segmento.ggb

Già i greci si accorsero che alcuni problemi erano refrattari ad essere risolti con la sola riga e compasso ...

- **Duplicazione del cubo**
- **La trisezione dell'angolo**
- **Quadratura del cerchio**
- **La costruzione dell'ettagono regolare.**

Ma perché?

Per ragioni di spazio, trattiamo solo quello della

Quadratura del cerchio

Il problema consiste nel determinare il lato di un quadrato avente la stessa area di un cerchio assegnato, **il che equivale a costruire un segmento di lunghezza π .**

Infatti, tenendo conto che si può provare che **un cerchio è equivalente ad un rettangolo avente per base la semicirconferenza e per altezza il raggio, ($\pi=\pi$)**, il problema della quadratura è ovviamente equivalente a quello della rettificazione della circonferenza, ovvero della determinazione del rapporto tra la circonferenza e il suo raggio (o il suo diametro).

In sostanza, indicato con π il rapporto C/d , tra la circonferenza C e il diametro d di un cerchio qualunque, **si tratta di costruire un segmento lungo π , a partire dal segmento unità.**

Immaginiamo di avere due torte (**blù** e **rossa**), di circonferenza .

Affettate in parti uguali, con fette sempre più piccole, alla fine le torte unite simmetricamente assumeranno la forma di un rettangolo (o un parallelogramma), di lati

L'area del rettangolo - che è l'area delle due torte - sarà , per cui l'area di una sola torta sarà .



area_cerchio1(Treccani).ggb

Premessa: che cosa sappiamo di ?

È un numero decimale, illimitato, non periodico

3,14 15926535897932384626433832795...

Nel settembre 2002 il gruppo di ricerca guidato da Yasumasa
Università di Tokio, ha calcolato il valore di π con
1 241 100 000 000 cifre decimali.

NON è una frazione

È irrazionale

Nota:

Numero razionale: si può scrivere sotto forma di frazione decimale, o con un numero finito di cifre (es. $\frac{1}{2}$), o periodico (es. $\frac{1}{3}$ periodico semplice; oppure $\frac{1}{6}$ periodico misto)

Se, invece, il decimale non si ripete mai il numero si dirà irrazionale (es. π)



Lo svizzero Eulero (1707-1783) ipotizzò che π fosse anche **trascendente**, cioè **che non potesse essere soluzione di alcuna equazione a coefficienti interi**.

Nel XVIII secolo, infatti, è stato scoperto uno speciale tipo di numero irrazionale, chiamato **trascendente**.

Qual è la differenza tra **irrazionale algebrici** e **trascendente**?

Un irrazionale algebrico si può ottenere come soluzione di una equazione con un numero finito di termini. Es. $\sqrt{2}$ è la soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$.
Quindi, $\sqrt{2}$ è costruibile con riga e compasso; quadrato doppio.

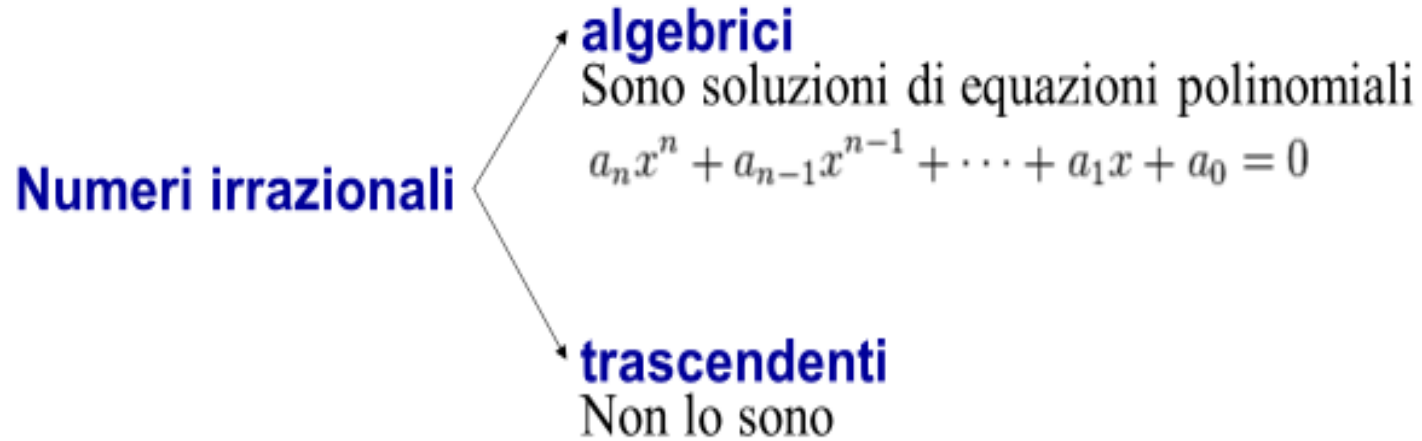


QUADRATO DOPPIO.ggb

Un numero trascendente non si può ottenere mediante soluzione di una equazione con un numero finito di termini. Es. e , π , ...

Ecco spiegato pure perché il problema della duplicazione del cubo non è **risolubile**, poiché l'equazione $x^3 - 2 = 0$, avente soluzione $\sqrt[3]{2}$, ed essendo **trascendente**, non è costruibile con riga e compasso.

La trascendenza



$\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$ sono algebrici o trascendenti?

π è algebrico o trascendente?

p è trascendente. È stato dimostrato da Ferdinand von Lindemann nel 1882,

Da questo segue che è impossibile quadrare il cerchio, ed è dimostrato che circonferenza e raggio sono incommensurabili!!!



Due grandezze omogenee si dicono **incommensurabili** se **non ammettono alcun sottomultiplo comune.**

Il rapporto delle due grandezze incommensurabili è un numero irrazionale, algebrico o trascendente.

La lunghezza della circonferenza e la misura del raggio non hanno sottomultipli comuni.

Seppure indirettamente, il problema è sfiorato anche in un altro passo della *Commedia*.

Paradiso, XIII, 124-129

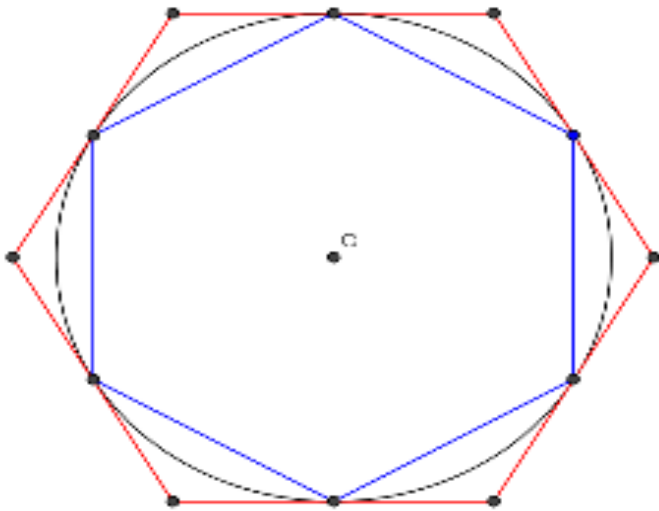
Dante cita Brisso (o Brissone, o Brisone), un matematico, secondo alcuni, della scuola di Euclide, perché, assieme ad Antifone, è deriso da Aristotele in quanto ostinato ricercatore della quadratura del circolo.

Gli sforzi di Brissone risultarono tanto vani da meritargli lo scherno di Aristotele e, conseguentemente, di Dante, ma i suoi lavori furono importanti. Cioè, l'uso della tecnica dei **poligoni inscritti e circoscritti**, poi perfezionata e mirabilmente applicata da **Archimede**.

Sostanzialmente Antifone ebbe l'idea di usare i poligoni inscritti con un numero sempre maggiore di lati, mentre Brissone vi aggiunse l'idea di usare anche i poligoni circoscritti.

L'idea di approssimazioni successive e sempre più accurate con poligoni regolari può essere utilizzata anche per determinare la misura dell'area del cerchio.

Consideriamo i poligoni inscritti e circoscritti alla circonferenza, di lati



n	$\Pi = p_n/2r$	$\Pi = P_n/2r$
6	3	3.46410161513
12	3.10582854123	3.21539030917
24	3.13262861328	3.15965994209
48	3.13935020304	3.14608621513
96	3.14103195089	3.14271459964
192	3.14145247228	3.14187304997
384	3.14155760791	3.14166274705
768	3.14158389214	3.14161017660
1536	3.14159046322	3.14159703432
3072	3.14159210599	3.14159374877
6144	3.14159251669	3.14159292738
12288	3.14159261936	3.14159272203

I perimetri p_n sono crescenti.

I perimetri P_n sono decrescenti.

La differenza $P_n - p_n$ tende a zero.

Dividendo i coefficienti per due otteniamo le approssimazioni di π .



pi0.ggb



pi1.ggb



rotolamento.ggb



Iterazione quadrato.ggb



2q.ggb

Possiamo dunque stabilire che:

Un numero trascendente non può essere costruibile.

Pertanto, anche il **problema della quadratura del cerchio non può essere risolto con riga e compasso.**

Infatti: **è trascendente**, come pure il numero

Vale il seguente teorema:

Se un'equazione cubica non ammette radici razionali, allora nessuna delle sue radici è un numero costruibile partendo dal campo dei numeri razionali.

In conclusione:

Siamo alla fine dell'ultimo canto della Commedia: lo slancio creativo di Dante si tende in un supremo sforzo di esprimere l'inesprimibile.

Dante sembra propendere, in questi versi, per la insolubilità di questo problema, considerato che lo paragona a quello di comprendere, inutilmente, il mistero dell'Incarnazione.

La difficoltà di questa spiegazione è paragonata a quello che può essere considerato il problema principe della geometria classica: la quadratura del cerchio.

Forse proprio per questo Dante aveva riservato questa citazione al momento più complesso e delicato della sua opera, perché **vedeva nella Matematica e nella Geometria il più alto grado di perfezione raggiungibile dalla sola ragione umana.**

Folgorazione e supremo appagamento di Dante (139-145)

*A l'alta fantasia qui mancò possa;
ma già volgeva il mio disio e
'velle,
sì come rota ch'igualmente è
mossa,*

*l'amor che move il sole e l'altre
stelle.*

Alla mia alta immaginazione qui
mancarono le forze (possa); ma ormai
l'amore divino, che muove il Sole e le
altre stelle, volgeva il mio desiderio e la
mia volontà (velle), come una ruota (rota)
che è mossa in modo uniforme
(inigualmente) e regolare (Dio aveva
appagato ogni mio intimo desiderio)

Dante riconosce la propria incapacità a comprendere il mistero dell'Incarnazione dell'umano nel divino, fino a quando la sua mente viene colpita da un alto fulgore che, in una sorta di rapimento mistico, appaga il suo desiderio. Alla sua immaginazione ora mancano le forze, tuttavia l'amore divino ha ormai placato la sua volontà di conoscere, muovendola come una ruota che si muove in modo regolare e uniforme.



Una curiosità, infine: forse perché già nel primo canto del Purgatorio Dante vede **le 4 stelle** che sono il simbolo delle **quattro virtù cardinali** (**fortezza, prudenza, giustizia e temperanza**), è da notare il contrapposto della parola **STELLE** con cui Dante chiude tutte e tre le cantiche della Commedia:

- **nell'Inferno: ... *E quindi uscimmo a riveder le stelle.***
- **nel Purgatorio: ... *Puro e disposto a salire alle stelle.***
- **nel Paradiso: ... *L'Amor che muove il sole e l'altre stelle.***
-



GRAZIE!